



ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΙΝΗΣΕΩΝ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει απλές κινήσεις σωμάτων που διαγράφουν κατά την διάρκεια της κίνησης τους ευθείες τροχιές. Στη φύση όμως είναι δυνατό ένα σώμα να συμμετέχει σε δύο ή περισσότερες κινήσεις. Η κίνηση που εκτελεί τότε το σώμα ονομάζεται σύνθετη κίνηση. Π. χ. σύνθετη κίνηση είναι η κίνηση που κάνει ένας επιβάτης που αναζητά θέση σε κινούμενο τρένο , η αεροσουνός που σερβίρει επιβάτες κατά την πτήση ,αλλά και ένα πακέτο που πέφτει από ένα αεροπλάνο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα u_0 σε ύψος h . Τότε το σώμα ενώ πέφτει κατακόρυφα μετατοπίζεται ταυτόχρονα και οριζόντια.

Αυτή η κίνηση είναι αντίστοιχη με αυτή που εκτελεί ένα σώμα όταν εκτοξεύεται, από ορισμένο ύψος από το έδαφος με ταχύτητα \vec{u}_0 με διεύθυνση παράλληλη στην επιφάνεια του εδάφους. Η σύνθετη αυτή κίνηση ονομάζεται **οριζόντια βολή** και είναι μια κίνηση κατά την οποία στο σώμα ενεργεί μόνο η δύναμη του βάρους του.

Η οριζόντια βολή μπορεί να αναλυθεί σε δύο απλές κινήσεις :

1. Την κατακόρυφη κατά την οποία το σώμα εκτελεί **ελεύθερη πτώση** με την επίδραση του βάρους.
2. Την οριζόντια κίνηση, κατά την διεύθυνση της οποίας δεν ενεργεί στο σώμα καμία δύναμη και έτσι αυτό εκτελεί **ευθύγραμμη ομαλή** κίνηση με ταχύτητα μέτρου u_0

Γενικότερα , για να περιγράψουμε κάθε σύνθετη κίνηση χρησιμοποιούμε μια βασική αρχή

ΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΤΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ.

Σύμφωνα με την αρχή αυτή :

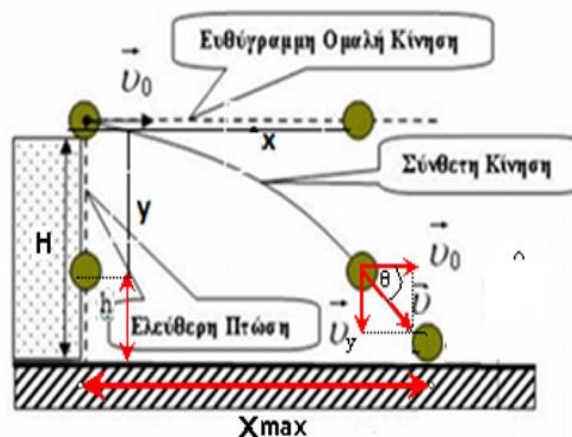
Κάθε κίνηση σε επίπεδο , ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη μπορεί να θεωρηθεί ως σύνθεση δύο κατάλληλων ευθύγραμμων κινήσεων που εξελίσσονται ανεξάρτητα αλλά ταυτόχρονα.

Για τον υπολογισμό της ταχύτητας και της θέσης του μετά από χρόνο t χρησιμοποιούμε το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων και των θέσεων αντίστοιχα που θα είχε το κινητό αν εκτελούσε τις κινήσεις χωριστά. Δηλαδή :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{και} \quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

Εφαρμόζοντας την αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων στην οριζόντια βολή προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις κινήσεις που μας δίνουν την επιτάχυνση , τη ταχύτητα και τη θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή τόσο κατά τον οριζόντιο άξονα Ox όσο και στον κατακόρυφο Oy .

Οριζόντιος άξονας - Ευθύγραμμη ομαλή	Κατακόρυφος άξονας - Ελεύθερη πτώση
$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = W = mg$
Επιτάχυνση στο άξονα x , $a_x = 0$,	Επιτάχυνση στο άξονα y , $a_y = g$,
Ταχύτητα στο άξονα x , $u_x = u_0$,	Ταχύτητα στο άξονα y $u_y = gt$,
Οριζόντια μετατόπιση, $x = u_0 t$	Κατακόρυφη μετατόπιση, $y = \frac{1}{2} g t^2$





Σύνθετη κίνηση	
Εξίσωση τροχιάς (σχέση κατακόρυφης με οριζόντια μετατόπιση από το σημείο βολής)	$y = \frac{g}{2u_0^2} x^2$
Συνολική ταχύτητα σε μια χρονική στιγμή (μέτρο και διεύθυνση)	$\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y \text{ \&}$ $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ $\varepsilon\varphi\theta = \frac{u_y}{u_x}$
Χρόνος πτώσης από ύψος H	$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Σημαντικά στοιχεία οριζόντιας βολής

1. Το μέτρο της συνολικής ταχύτητα u του σώματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη

$$\text{σχέση } u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

2. Κάθε μια από τις δύο ξεχωριστές κινήσεις διαρκεί το ίδιο χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο έδαφος.
3. Η μέγιστη οριζόντια απόσταση x_{\max} που αλλιώς λέγεται και **Βεληνεκές** και ισούται με

$$x = u_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

4. Κάθε χρονική στιγμή t , η απόσταση h από το έδαφος του σώματος που εκτελεί Ο.Β, θα δίνεται από τη σχέση $h = H - y$. Όπου H το ύψος από το οποίο έπεσε και y κατακόρυφη απόσταση που διένυσε μέχρι τη στιγμή t

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**

A1. Η οριζόντια βολή

α. είναι μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

β. είναι σύνθετη κίνηση αποτελούμενη από μια οριζόντια ομαλή κίνηση και μια ελεύθερη πτώση

γ. είναι σύνθετη κίνηση αποτελούμενη από μια οριζόντια ομαλή κίνηση και μια κατακόρυφη βολή προς τα κάτω

δ. είναι σύνθετη κίνηση αποτελούμενη από μια οριζόντια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και μια ελεύθερη πτώση

A2. Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων (αρχή της επαλληλίας) όταν

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες κινήσεις

α. Η συνολική μετατόπιση ισούται με το άθροισμα των απόλυτων τιμών των μετατοπίσεων λόγω των επιμέρους κινήσεων

β. Η κάθε κίνηση εκτελείται σε άμεση και διαρκή εξάρτηση από την άλλη

γ. Η θέση στην οποία φτάνει το σώμα σε χρόνο t , είναι ίδια είτε οι κινήσεις εκτελούνται μαζί είτε εκτελούνται χωριστά στον ίδιο χρόνο t η κάθε μία.

δ. η ταχύτητα μετά χρόνο t ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ταχυτήτων που αποκτά το σώμα λόγω των επιμέρους κινήσεων.

A3. Η οριζόντια βολή στο ομογενές πεδίο βαρύτητας είναι σύνθετη κίνηση που μπορεί να

αναλυθεί σε δύο κινήσεις οι οποίες είναι:

α. ομαλά επιταχυνόμενες σε κάθε άξονα.

β. ομαλή στον οριζόντιο άξονα και ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο.

γ. ομαλή και στους δύο άξονες.

δ. ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα και ομαλά επιβραδυνόμενη στον οριζόντιο.'

A4. Σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος h με αρχική ταχύτητα $υ_0$.

Ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι:

α. ανάλογος του ύψους h .

β. ανεξάρτητος της τιμής του g .

γ. ανάλογος της $υ_0$

δ. ανεξάρτητος της $υ_0$.

A5. Σώμα βάλλεται οριζόντια από σημείο O που βρίσκεται σε ύψος h με αρχική ταχύτητα $υ_0$ μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας στο οποίο η επιτάχυνση είναι g . Θεωρούμε ότι η κίνηση γίνεται σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων (xOy). Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

α. Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας είναι συνεχώς ίση με $υ_0$.

β. Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας είναι ανάλογη του χρόνου πτήσης t .

γ. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει κατεύθυνση εφαπτομένη της τροχιάς του σώματος.

δ. Η ταχύτητα αυξάνεται μόνο κατά τον άξονα Oy και με σταθερό ρυθμό.



B1. Δύο μικρές σφαίρες Α και Β εκτοξεύονται οριζόντια, ταυτόχρονα, την στιγμή $t=0$, από ύψη h_A και h_B αντίστοιχα που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο. Οι αρχικές οριζόντιες ταχύτητες των σφαιρών έχουν μέτρα $u_{0A} = 3u_{0B}$. Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα.

Α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Αν τα σώματα φτάνοντας στο έδαφος έχουν διανύσει ίδια οριζόντια απόσταση, τότε ισχύει:

- α) $h_A / h_B = 1/3$ β) $h_A / h_B = 4/9$ γ) $h_A / h_B = 1/9$

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

B.2 Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 εκτοξεύονται οριζόντια με την ίδια ταχύτητα από σημεία Α και Β αντίστοιχα που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και σε ύψη από το έδαφος h_1 και h_2 αντίστοιχα για τα οποία ισχύει $h_1 = 4 h_2$.

Α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Αν η οριζόντια μετατόπιση από το σημείο εκτόξευσης των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μέχρι το σημείο πρόσκρουσης στο έδαφος (δηλαδή το βεληνεκές), είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει :

- α. $x_1 = 4 x_2$ β. $x_1 = \sqrt{2} x_2$ γ. $x_1 = 2 x_2$

Β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

Ασκήσεις

1. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια. Πέφτει στο έδαφος μετά από $t = 2 \text{ sec}$ έχοντας διανύσει οριζόντια απόσταση $x = 20 \text{ m}$.

- Με πόση ταχύτητα το είχαμε εκτοξεύσει;
- Από πόσο ύψος το εκτοξεύσαμε;
- Πόση είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας με την οποία πέφτει στο έδαφος;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι δεν υπάρχουν αντιστάσεις

2. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα $u = 10 \text{ m/s}$ και πέφτει στο έδαφος μετά από $t = 4 \text{ sec}$.

- Πόση οριζόντια απόσταση διάνυσε;
- Από πόσο ύψος το εκτοξεύσαμε;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι δεν υπάρχουν αντιστάσεις

3. Σώμα ρίχνεται οριζόντια από ύψος $h = 180 \text{ m}$ από το έδαφος με ταχύτητα $u_0 = 20 \text{ m/s}$. Να βρείτε :

α. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα στο έδαφος και ποια θα είναι η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του

- Την ταχύτητα με την οποία θα φτάσει το σώμα στο έδαφος

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι δεν υπάρχουν αντιστάσεις



4. Σώμα εκτοξεύεται από ύψος $h = 45\text{m}$ πάνω από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα $u_0 = 30\text{m/s}$. Αν $g = 10\text{m/s}^2$, να υπολογίσετε :

- Το χρόνο που χρειάζεται ώστε το σώμα να φτάσει στο έδαφος, καθώς και το βεληνεκές της οριζόντιας βολής.
- Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος.
- Τις τιμές της οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης του σώματος ύστερα από χρόνο $t = 2\text{s}$.
- Τη δυναμική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$, αν η μάζα του είναι 2kg .
(Απ. α. 3s , 90m , β. m/s , γ. $x = 60\text{m}$, $y = 20\text{m}$, δ. $U = 800\text{J}$)

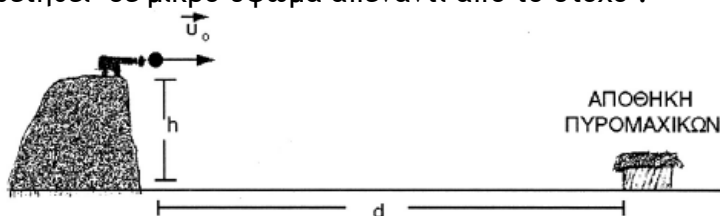
5. Ένα σώμα βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος και βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $u_0 = 80\text{m/s}$. Αν το σώμα φτάνει στο έδαφος σε χρόνο $t = 6\text{s}$, να βρείτε

- το ύψος h .
- το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος.
- τη γωνιακή εκτροπή του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$.
- την οριζόντια μετατόπιση του σώματος, όταν η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $y = 20\text{m}$.
Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.
(Απ. α. 180m , β. 100m/s , γ. $\text{εμφ} = \frac{1}{2}$, δ. 160m)

6. Σώμα μάζας 4kg εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h με αρχική ταχύτητα $u_0 = 9\text{m/s}$ και φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $u_{\text{εδ}} = 15\text{m/s}$. Αν $g = 10\text{m/s}^2$, να υπολογίσετε

- το χρόνο κίνησης μέχρι το έδαφος.
- το ύψος h .
- το βεληνεκές της βολής.
- τη μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο βολής.
(Απ. α. $1,2\text{s}$, β. $7,2\text{m}$, γ. $10,8\text{m}$, δ. 450J)

7. Κανόνι του πυροβολικού εκτοξεύει οριζόντια με ταχύτητα $u_0 = 80\text{m/s}$ ένα βλήμα. Η κάννη του κανονιού βρίσκεται σε ύψος $h = 20\text{m}$ από το έδαφος, αφού το κανόνι έχει τοποθετηθεί σε μικρό ύψωμα απέναντι από το στόχο :



Η αποθήκη πυρομαχικών βρίσκεται σε απόσταση $d = 200\text{m}$ από το ύψωμα .

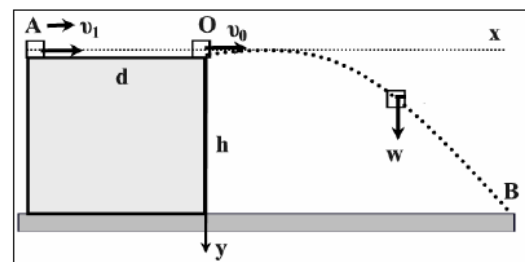
- Πετυχαίνει το βλήμα το στόχο του ;
- Ποια είναι η εξίσωση τροχιάς του βλήματος ;
- πόσο χρόνο χρειάζεται το βλήμα για να φτάσει στο έδαφος και πόσο απέχει από το σημείο εκτόξευσης τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος ;
Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$

8. Από σημείο O που βρίσκεται σε ύψος $h = 125\text{m}$ από το οριζόντιο έδαφος εκτοξεύονται οριζόντια δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με ταχύτητες $u_{01} = 6\text{m/s}$ και $u_{02} = 10\text{m/s}$ σε αντίθετες κατευθύνσεις. Το σώμα Σ_1 εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ενώ με καθυστέρηση $\Delta t = 2\text{s}$ εκτοξεύεται και το σώμα Σ_2 . Τη στιγμή που το Σ_1 φτάνει στο σημείο A του εδάφους, το σώμα Σ_2 βρίσκεται σε σημείο B . Να υπολογιστούν:

- Το ύψος από το έδαφος που βρίσκεται το σώμα Σ_2 τη στιγμή που το A φτάνει στο έδαφος.
- Η απόσταση AB .
- Η απόσταση των δύο σωμάτων όταν και τα δύο θα βρίσκονται στο έδαφος.
Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.
α. $d = 80\text{m}$, β. $AB = 100\text{m}$, γ. $s = 80\text{m}$



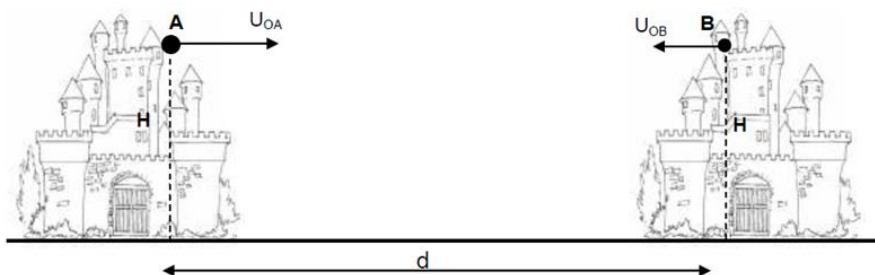
9. Κύβος μάζας $m=2\text{kg}$ εκτοξεύεται από το Α που βρίσκεται πάνω σε ταράτσα κτηρίου με αρχική ταχύτητα $u_1=8\text{m/s}$. Ο κύβος κινείται χωρίς τριβές πάνω στο δάπεδο της ταράτσας αλλά δέχεται μια σταθερή προωθητική δύναμη από τον αέρα μέτρου $F=10\text{N}$ με αποτέλεσμα αφού διανύσει απόσταση $d=3,6\text{m}$ να φτάσει το σημείο Ο που είναι στην άκρη της ταράτσας με ταχύτητα μέτρου u_0 . Στο σημείο Ο καταργείται η δύναμη F και το ο κύβος ξεκινά οριζόντια βολή με ταχύτητα u_0 . Αν το σημείο Ο απέχει από το έδαφος απόσταση $h=80\text{m}$,



- α. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας u_0 με το οποίο ξεκινά την οριζόντια βολή.
 - β. Να υπολογιστεί η μέγιστη οριζόντια απόσταση του κύβου από το σημείο Ο όταν αυτός φτάνει στο έδαφος στο σημείο Β
 - γ. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του κύβου τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος
 - δ. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του κύβου τη στιγμή που αυτός απέχει κατακόρυφη απόσταση από το έδαφος ίση με το μισό της αρχικής
 - ε. Να βρεθεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κύβου κατά τη διάρκεια της πτήσης από το Ο στο Β.
- Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

10.

Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_A=2\text{kg}$ και $m_B=3\text{kg}$ εκτοξεύονται ταυτόχρονα οριζόντια με ταχύτητες $U_{OA}=10\text{m/s}$ και $U_{OB}=8\text{m/s}$ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Τα σώματα εκτοξεύονται από ύψος $H=80\text{m}$ από δύο πύργους που βρίσκονται ο ένας απέναντι από το άλλο και απέχουν απόσταση $d=54\text{m}$.



Να υπολογίσετε:

- i. Το χρόνο συνάντησης των δύο σωμάτων.
- ii. Τις θέσεις των δύο σωμάτων ως προς τα αντίστοιχα σημεία βολής τους τη στιγμή της συνάντησης τους
- iii. Την ταχύτητα του σώματος Α (μέτρο και κατεύθυνση) την στιγμή της συνάντησής τους.
- iv. Την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κτιρίων έτσι ώστε τα δύο σώματα να μην συναντηθούν.
- v. Το χρόνο που χρειάζεται το σώμα Α για να φτάσει στο έδαφος, αν είχε διπλάσια μάζα.